

CHƯƠNG III: NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

BÀI 1: NGUYÊN HÀM

I. Nguyên hàm và tính chất

1. Nguyên hàm

ĐỊNH NGHĨA.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Hàm số $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $\forall x \in K$

Ví dụ:

a) Hàm số $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ vì $F'(x) = (x^3)' = 3x^2, \forall x \in (-\infty; +\infty)$.

b) Hàm số $F(x) = \ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ vì $F'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}, \forall x \in (0; +\infty)$.

ĐỊNH LÝ 1: Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C , hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

ĐỊNH LÝ 2: Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$ với C là một hằng số.

KÍ HIỆU: $\int f(x) dx = F(x) + C$

2. Tính chất của nguyên hàm

- Tính chất 1: $\int f'(x) dx = f(x) + C$

- Tính chất 2: $\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx$ (k là hằng số khác 0)

- Tính chất 3: $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

3. Sự tồn tại của nguyên hàm

ĐỊNH LÝ 3: Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .

* Bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp:

$\int 0 dx = C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$
$\int dx = x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$

Ví dụ: Tính

a) $\int (x^2 + \cos x) dx = \int x^2 dx + \int \cos x dx = \frac{x^3}{3} + \sin x + C \quad (\forall x \in -\infty; +\infty)$

b) $\int (3x - e^x) dx = \int 3x dx - \int e^x dx = \frac{3x^2}{2} - e^x + C \quad (\forall x \in -\infty; +\infty)$

II. Phương pháp tính nguyên hàm

1. Phương pháp đổi biến số:

ĐỊNH LÝ 1: Nếu $\int f(u) du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = F(u(x)) + C$$

Ví dụ: Tính nguyên hàm sau

a) $A = \int x(x-1)^6 dx$

Giải

Đặt $t = x - 1 \Rightarrow dt = dx$

$$\text{Nên } A = \int (t+1)t^6 dt = \int (t^7 + t^6) dt = \frac{t^8}{8} + \frac{t^7}{7} + C = \frac{(x-1)^8}{8} + \frac{(x-1)^7}{7} + C$$

$$\text{b) } B = \int x\sqrt{x+1} dx$$

Giải

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow 2t dt = dx$$

$$\text{Nên } B = \int (t^2 - 1)t 2t dt = \int (2t^4 - 2t^2) dt = \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + C = \frac{2}{5}(x+1)^2 \sqrt{x+1} - \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + C$$

2. Phương pháp tính nguyên hàm từng phần:

ĐỊNH LÝ 2: Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx$$

Công thức: $\int u dv = uv - \int v du$

Ví dụ: Tính nguyên hàm sau

$$\text{a) } C = \int xe^x dx$$

$$\text{b) } D = \int x \cos x dx$$

$$\text{c) } E = \int \ln x dx$$

Giải

$$\text{a) } C = \int xe^x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\text{Nên } C = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

$$\text{b) } D = \int x \cos x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$\text{Nên } D = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

$$\text{c) } E = \int \ln x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$$

$$\text{Nên } E = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

Bài tập trắc nghiệm.

Câu 1. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu:

A. $F'(x) = -f(x), \forall x \in K$.

B. $f'(x) = F(x), \forall x \in K$.

C. $F'(x) = f(x), \forall x \in K$.

D. $f'(x) = -F(x), \forall x \in K$.

Câu 2. $\int x^2 dx$ bằng:

A. $2x + C$.

B. $\frac{1}{3}x^3 + C$.

C. $x^3 + C$.

D. $3x^3 + C$.

Câu 3. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3$ là:

A. $4x^4 + C$.

B. $3x^2 + C$.

C. $x^4 + C$.

D. $\frac{1}{4}x^4 + C$.

Câu 4. $\int 5x^4 dx$ bằng:

A. $\frac{1}{5}x^5 + C$.

B. $x^5 + C$.

C. $5x^5 + C$.

D. $20x^3 + C$.

Câu 5. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là:

A. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$

B. $x^4 + x^2 + C$

C. $x^5 + x^3 + C$.

D. $4x^3 + 2x + C$

Câu 6. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$ là:

A. $\sin x + 3x^2 + C$.

B. $-\sin x + 3x^2 + C$.

C. $\sin x + 6x^2 + C$.

D. $-\sin x + C$

Câu 7. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin x$.

A. $\int 2 \sin x dx = -2 \cos x + C$

B. $\int 2 \sin x dx = 2 \cos x + C$

C. $\int 2 \sin x dx = \sin^2 x + C$

D. $\int 2 \sin x dx = \sin 2x + C$

Câu 8. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.

C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C$.

Câu 9. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C.$

Câu 10. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x-2}.$

A. $\int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C$

B. $\int \frac{dx}{5x-2} = \ln|5x-2| + C$

C. $\int \frac{dx}{5x-2} = -\frac{1}{2} \ln|5x-2| + C$

D. $\int \frac{dx}{5x-2} = 5 \ln|5x-2| + C$

Câu 11. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$

A. $\int \cos 3x dx = 3 \sin 3x + C$

B. $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$

C. $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C$

D. $\int \cos 3x dx = -\frac{\sin 3x}{3} + C$

Câu 12. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x.$

A. $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$

B. $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C$

C. $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$

D. $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C$

Câu 13. Tìm nguyên hàm $\int x(x^2 + 7)^{15} dx.$

A. $\frac{1}{2}(x^2 + 7)^{16} + C$

B. $-\frac{1}{32}(x^2 + 7)^{16} + C$

C. $\frac{1}{16}(x^2 + 7)^{16} + C$

D. $\frac{1}{32}(x^2 + 7)^{16} + C$

Câu 14. Nguyên hàm của hàm số $y = e^{2x-1}$ là:

A. $2e^{2x-1} + C.$

B. $e^{2x-1} + C.$

C. $\frac{1}{2}e^{2x-1} + C.$

D. $\frac{1}{2}e^x + C.$

Câu 15. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C.$

B. $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C.$

C. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$

D. $\int e^x dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C.$

Câu 16. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-2}$, biết $F(1) = 2$. Giá trị của $F(0)$ bằng:

A. $2 + \ln 2.$

B. $\ln 2.$

C. $2 + \ln(-2).$

D. $\ln(-2).$

Câu 17. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \frac{1}{2x+1}$; biết $F(0) = 2$. Tính $F(1)$.

A. $F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 - 2.$

B. $F(1) = \ln 3 + 2.$

C. $F(1) = 2 \ln 3 - 2.$

D. $F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2.$

Câu 18. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$.

Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$

B. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$

C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$

D. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$

Câu 19. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

A. $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$

B. $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$

C. $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$

D. $F(x) = \cos x - \sin x + 3$

Câu 20. Biết $F(x) = e^x + x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x) dx$ bằng:

A. $2e^x + 2x^2 + C.$

B. $\frac{1}{2}e^{2x} + x^2 + C.$

C. $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x^2 + C.$

D. $e^{2x} + 4x^2 + C.$

...HẾT...